Analiza Funkcjonalna
WPPT IIIr. semestr letni 2011
WYKŁAD 10: Twierdzenie Kreina–Milmana

13/06/2011

UWAGA: Na potrzeby tego wykładu, wszelkie przestrzenie liniowe będziemy traktować jako przestrzenie rzeczywiste.

Zbiory wypukłe

Definicja 1. Zbiór K w przestrzeni liniowej V jest wypukły, jeśli wraz z każdymi dwoma punktami zawiera każdą ich kombinację wypukłą:

$$x, y \in K \implies \forall_{p\in[0,1]}\ px + (1-p)y \in K.$$

Łatwe uwagi:

• Przez iterowanie wykazuje się, że zbiór wypukły zawiera wszelkie *skończone* kombinacje wypukłe swoich elementów:

$$x_1, x_2, \dots, x_n \in K \implies \forall_{p_1,p_2\dots,p_n\in[0,1]:p_1+p_2+\dots+p_n=1}\ p_1x_1 + p_2x_2 + \dots p_nx_n \in K.$$

• Przekrój dowolnej rodziny zbiorów wypukłych jest wypukły.

• W przestrzeni unormowanej domknięcie zbioru w wypukłego jest zbiorem wypukłym (trzeba skorzystać ze zwartości kwadratu $[0,1]\times[0,1]$).

PRZYKŁADY:
1. Jeśli P jest funkcjonałem na V, to zbiór $\{x : P(x) = a\}$ jest wypukły.
2. Niech A będzie dowolnym zbiorem. Wtedy $\mathrm{conv}(A)$ zdefiniowany jako zbiór wszystkich skończonych kombinacji wypukłych elementów z A jest zbiorem wypukłym oraz, w przestrzeni unormowanej, $\overline{\mathrm{conv}(A)}$ też. Zbiory te nazywamy *otoczką wypukłą} i domkniętą otoczką wypukłą} zbioru A.*

Funkcje afiniczne i wypukłe

Definicja 2. Funkcja F określona na V nazywa się afiniczną (wypukłą), jeśli dla każdych $x, y \in V$ i $p \in [0,1]$ zachodzi równość (nierówność)

$$F(px + (1-p)y) = (\le)\ pF(x) + (1-p)F(y).$$

Łatwe uwagi:

• Funkcja afiniczna jest w szczgólności wypukła.

• Funkcjonał liniowy plus stała jest funkcją afiniczną.

• Maksimum (punktowe) skończenie wielu funkcji wypukłych (lub afinicznych) jest funkcją wypukłą.

• Jeśli F jest funkcją wypukłą to zbiór $\{x : F(x) \le a\}$ jest wypukły.

Lemat 1. *Niech K będzie zbiorem wypukłym w przestrzeni unormowanej. Na V określamy funkcję $F(x) = d(x, K)$ (przypominam, $d(x, K) = \inf\{d(x, a) : a \in K\}$). Wtedy funkcja ta jest ciągła i wypukła.*

Dowód. Ciągłość funkcji ,,odległość od zbioru" jest znana z topologii (wynika z ciągłości metryki). Wypukłość: Niech $z = px + (1-p)y$ ($p \in [0, 1]$). Niech $a \in K$, $b \in K$. Wtedy $c = pa + (1-p)b \in K$ oraz

$$d(z, K) \leq d(z, c) = \|px + (1-p)y - (pa + (1-p)b)\| = \\ \|p(x-a) + (1-p)(y-b)\| \leq p\|x-a\| + (1-p)\|y-b\|.$$

Biorąc infimum po a i b dostajemy $d(z, K) \leq pd(x, K) + (1-p)d(y, K)$, czyli $F(px + (1-p)y) \leq pF(x) + (1-p)F(y)$ $\square$

Zbiory i punkty ekstremalne

Definicja 3. Podzbiór B zbioru A nazwiemy *ekstremalnym w A* jeśli jedyne kombinacje wypukłe dwóch punktów z A dające w wyniku punkty z B, to kombinacje punktów z B:

$$\forall_{x,y \in A, p \in [0,1]} \;\; px + (1-p)y \in B \implies x, y \in B.$$

(Uwaga: Nie zakładmay tu wypukłości żadnego z tych zbiorów.)

Łatwe uwagi:

• Przekrój dowolnej rodziny podzbiorów ekstremalnych w A jest podzbiorem ekstremalnym w A.

• Jeśli C jest ekstremalny w B oraz B jest ekstremalny w A, to C jest ekstremalny w A.

PRZYKŁADY:
1. Oczywiście A jest podzbiorem ekstremalnym w A.
2. Jeśli F jest funkcją wypukłą i osiąga na zbiorze A swoje maksimum M, to zbiór $B = \{x \in A : F(x) = M\}$ jest ekstremalny w A.

Definicja 4. Punkt $x \in A$ nazwiemy *punktem ekstremalnym zbioru A* jeśli $\{x\}$ jest zbiorem ekstremalnym w A.

Lemat 2. *Niech A będzie dowolnym zbiorem. Wtedy każdy podzbiór B zwarty i ekstremalny w A (w szczególności A, o ile jest zwarty) zawiera punkt ekstremalny zbioru A.*

Dowód. Rodzina domkniętych (a więc zwartych) podzbiorów ekstremalnych w A zawartych w B jest niepusta (zawiera przynajmniej B). Każdy łańcuch (gdzie porządkiem jest odwrócona inkluzja: pozdbiór jest wyżej w hierarchii) ma kres: swój przekrój. Z lematu K-Z istnieje *maksymalny* (tzn. minimaly w sensie inkluzji) podzbiór C domknięty i ekstremalny w A zawarty w B. Załóżmy, że C nie jest jednopunktowy, np. zawiera x_0, x_1, $x_0 \neq x_1$. Niech $F(x) = d(x, x_0)$. Jest to funkcja ciągła i wypukła, a jej maksimum M na C jest większe od zera (bo już $F(x_1) > 0$). Podzbiór D w C, na którym to maksimum jest osiągane jest domknięty i, jak wiemy, ekstremalny w C, a więc i w A. Ponieważ $F(x_0) = 0$, to $x_0 \notin D$, co oznacza, że D jest istotnym podzbiorem C, a to przeczy maksymalności (czyli de facto minimalności) C. $\square$

Twierdzenie Kreina-Milmana. *Niech K będzie zbiorem wypukłym i zwartym. Niech E oznacza zbiór wszystkich punktów ekstremalnych w K (jak wiemy, jest to zbiór niepusty). Wtedy $K = \overline{\mathrm{conv}(E)}$.*

Dowód. Oczywiście $K' = \overline{\mathrm{conv}(E)}$ jest domkniętym (a więc zwartym) podzbiorem wypukłym zbioru K. Określamy funkcję $F(v) = d(x, K')$. Z Lematu 1, jest to funkcja ciągła i wypukła. Jeśli $K' \neq K$, to funkcja ta jest ściśle dodatnia w jakimś punkcie zbioru K, a jako funkcja ciągła osiąga na tym zbiorze swoje maksimum $M > 0$. Wtedy zbiór $B = \{x \in K : F(x) = M\}$ jest zbiorem domkniętym i ekstremalnym w K (patrz Przykład 2). Oczywiście jest on rozłączny z K' (bo na K' funkcja F się zeruje). Z Lematu 2, B zawiera punkt ekstremalny, a to jest sprzeczność. $\square$

ZADANIE: Rozważmy zbiór macierzy kwadratowych $n \times n$ *podwójnie stochastycznych* (tzn. o wyrazach nieujemnych i takich, że suma każdego wiersza i każdej kolumny jest 1). Wykaż, że jest to zbiór zwarty i wypukły oraz, że jego punktami ekstremalnymi są dokładnie macierze permutacyjne (mające w każdym wierszu i w każdej kolumnie po jednej jedynce, a reszta zera). Wywynioskuj teraz, jak można przedstawić każdą macierz podwójnie stochastyczną (dlaczego nie trzeba już domykać otoczki wypukłej).